Ein Schritt vor, zwei zurück

Johannes Barton, Wien 2011

Das Leben ist ein Spiel. Man macht keine größeren Gewinne, ohne Verluste zu riskieren. Nicht nur Christine von Schweden, der dieses Zitat zugeschrieben wird, sondern eine Fülle von bedeutenden Persönlichkeiten hat das Leben oder Teile unserer Entwicklung mit einem Spiel verglichen. So ein Spiel muss mehrere Positionen aufweisen, da wir das auch von unserer Entwicklung voraussetzen. Zumindest zwei dieser Positionen nehmen eine Sonderstellung ein, da sie den, von jedem Spiel her bekannten Begriffen "Gewinn" und "Verlust" entsprechen müssen. Weiters spricht Christine von Risiko und meint damit sicherlich, dass dem Spiel ein bedeutender Zufallscharakter innewohnt.

Als freie Individuen können wir entscheiden, ob wir das Spiel annehmen oder auch nicht. Spielen wir nicht, dann wird sich auch an unserer Position nichts ändern. Absolute Freiheit in der Entscheidung bedeutet aber, dass wir auch beim Spielen keine Positionsänderung *erwarten* werden.

Ein mögliches Spiel in diesem Sinne wäre ein, in der mathematischen Literatur häufig untersuchter, eindimensionaler Random Walk, bei dem mit gleichen Wahrscheinlichkeiten von je 50 % ein Schritt nach vorne bzw. ein Schritt nach hinten vollzogen wird. Bezeichnet X_i den Schritt $+1$ bzw. -1 beim i-ten Zug, dann gilt für den Erwartungswert:

$$\mathcal{E}\left(X_i\right) = +1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Da der Erwartungswert einer Summe gleich der Summe der Erwartungswerte ist, wird man auch nach beliebig vielen Zügen keine Änderung der Anfangsposition erwarten. Trotzdem kann bei einem solchen Random Walk jede mögliche Position realisiert werden, da weder die Anzahl der Positionen noch die Zahl der Züge beschränkt ist. Um daraus ein Spiel mit Gewinn und Verlust zu machen, denken wir uns eine endliche Anzahl an möglichen Positionen, welche wir von 0 bis n durchnumerieren können. Der Random Walk endet dann mit einem Verlust bei der Position 0 und mit einem Gewinn bei der Position n. Wir fragen nun nach der Wahrscheinlichkeit, das Ziel, nämlich die Position n, zu erreichen.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \text{Verlust} & & & & & & & & & & & & \text{Gewinn} \\ 0 & \leftharpoondown & 1 & \rightleftharpoons & 2 & \rightleftharpoons & \cdots\cdots & \rightleftharpoons & k & \rightleftharpoons & \cdots\cdots\cdots & \rightharpoonup & n \end{array}$$

Sei $P(k)$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit, wenn wir uns auf der Position k mit $0 \leq k \leq n$ befinden. Offensichtlich gilt $P(0) = 0$ und $P(n) = 1$. Da mit der Wahrscheinlichkeit $1 - P(k)$ die Position 0 erreicht wird, und die Wahrscheinlichkeiten für die Schritte $+1$ bzw. -1 gleich sind, gilt aus Symmetriegründen:

$$\frac{1 - P(k)}{P(k)} = \frac{n-k}{k} \quad \Longrightarrow \quad P(k) = \frac{k}{n}$$

Zwar kennen wir die Begriffe Gewinn und Verlust, wissen allerdings nicht, wie weit wir von diesen Positionen entfernt sind. Ein Optimist wird sich relativ nahe dem Ziel wähnen, und daher mit einem relativ kleinen Wert $(n-k)$ bei großem n eine relativ große Gewinnwahrscheinlichkeit für sich berechnen.

Nehmen wir einen solchen Random Walk als Sinnbild für unser Vorankommen im Leben, bei dem es immer wieder Rückschläge gibt, dann wäre auch ein Random Walk, welcher dem geflügelten Wort “ein Schritt vor – zwei Schritte zurück” nachempfunden ist, durchaus untersuchenswert. Erfolgt dabei der Schritt nach vorne mit einer Wahrscheinlichkeit von 2/3, und daher die zwei Schritte zurück mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/3, dann erhalten wir ebenfalls

$$\mathcal{E}\left(X_i\right) = +1 \cdot \frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{1}{3} = 0$$

als Erwartungswert für die Positionsänderung beim i-ten Zug. In diesem Sinne sollte also zwischen “ein Schritt vor – ein Schritt zurück” und “ein Schritt vor – zwei Schritte zurück” kein Unterschied bestehen. Gilt das aber auch für die Wahrscheinlichkeit, das Ziel zu erreichen?

Da uns keine Untersuchungen zu diesem speziellen Random Walk bekannt sind, wollen wir die Analyse des Problems möglichst allgemein und ausführlich behandeln. Auch sollten die mathematischen Ableitungen für Absolventen eines Gymnasiums nachvollziehbar sein.

Für diesen neuen Random Walk benötigen wir auch die Position -1, welche durch zwei Schritte zurück aus der Position $+1$ erreicht werden kann. Wir legen also

$$P(-1) = P(0) = 0 \quad \text{und} \quad P(n) = 1$$

fest und fragen für $1 \leq k \leq n-1$ nach $P(k)$. Um für diese Wahrscheinlichkeiten eine iterative Gleichung abzuleiten, verwenden wir den Satz über die totale Wahrscheinlichkeit und definieren uns zunächst drei Ereignisse:

$$\begin{aligned}
K &= \{\text{Wir befinden uns auf der Position } k \text{ und erreichen das Ziel.}\} \\
V &= \{\text{Beim nächsten Zug machen wir einen Schritt nach vorne.}\} \\
Z &= \{\text{Beim nächsten Zug machen wir zwei Schritte zurück.}\}
\end{aligned}$$

Da V und Z eine disjunkte Zerlegung des Ereignisraumes darstellen, gilt:

$$P(K) = P(K|V) \cdot P(V) + P(K|Z) \cdot P(Z)$$

In dieser Formel bedeutet beispielsweise $P(K|V)$ die Wahrscheinlichkeit, das Ziel von der Position k aus zu erreichen unter der Bedingung, dass wir beim nächsten Zug einen Schritt vorwärts machen. Diese Wahrscheinlichkeit ist offensichtlich gleichbedeutend mit der Wahrscheinlichkeit von der Position $(k+1)$ aus das Ziel zu erreichen. So gelangen wir zu der Beziehung

$$P(k) = P(k+1) \cdot \frac{2}{3} + P(k-2) \cdot \frac{1}{3} \quad \text{für} \quad 1 \leq k \leq n-1\ ,$$

die wir zu

$$3 \cdot P(k) = 2 \cdot P(k+1) + P(k-2) \quad \text{für} \quad 1 \leq k \leq n-1$$

umschreiben. (Diesen Teil der Argumentation haben wir deshalb so ausführlich begründet, weil in den meisten Arbeiten für ähnlich geartete Beziehungen eine Begründung gänzlich fehlt.) Die zuletzt genannte Gleichung behandeln wir mit einer erzeugenden Funktion, welche wir zu

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} P(k) \cdot x^k$$

festlegen, wobei wir uns nicht um das Konvergenzintervall kümmern, da dieses beliebig klein gewählt werden kann.

$$\begin{aligned} 3 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} P(k) \cdot x^k =& 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} P(k+1) \cdot x^k + \sum_{k=1}^{\infty} P(k-2) \cdot x^k \\ 3 \cdot x \cdot F(x) =& 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} P(k+1) \cdot x^{k+1} + x^3 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} P(k-2) \cdot x^{k-2} \\ 3 \cdot x \cdot F(x) =& 2 \cdot \big(F(x) - P(1) \cdot x\big) + x^3 \cdot \big(F(x) + P(-1) \cdot x^{-1} + P(0) \cdot x^0\big) \end{aligned}$$

Mit $P(-1) = P(0) = 0$ erhalten wir schließlich:

$$F(x) = \frac{2 \cdot P(1) \cdot x}{x^3 - 3 \cdot x + 2}$$

Diesen komplizierten Bruch werden wir im Folgenden durch eine Partialbruchzerlegung in einfachere Brüche aufspalten, deren Reihendarstellungen durch geometrische Reihen bzw. durch das Quadrat einer geometrischen Reihe gegeben sind. Ein anschließender Koeffizientenvergleich mit der Definition von $F(x)$ wird uns die Koeffizienten $P(k)$ in Abhängigkeit von $P(1)$ liefern. Mit $P(n) = 1$ werden wir so eine explizite Darstellung von $P(k)$ erhalten.
Zunächst erraten wir die Nullstellen des Nennerpolynoms von $F(x)$, sodass wir für die Partialbruchzerlegung folgenden Ausdruck erhalten:

$$F(x) = \frac{2 \cdot P(1) \cdot x}{(x+2) \cdot (x-1)^2} = \frac{2 \cdot P(1)}{9} \cdot \left(\frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+2} \right)$$

Mit den Reihendarstellungen

$$\frac{3}{(x-1)^2} = 3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot x^k \quad \text{und} \quad \frac{2}{x-1} = -2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \text{und} \quad \frac{2}{x+2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^k$$

liefert der angekündigte Koeffizientenvergleich:

$$P(k) = \frac{2 \cdot P(1)}{9} \cdot \left(3 \cdot k + 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right)$$

Nun sind wir mithilfe von $P(n) = 1$ in der Lage die explizite Darstellung

$$P(k) = \frac{3 \cdot k + 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^k}{3 \cdot n + 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

für $-1 \leq k \leq n$ anzugeben. Diese Wahrscheinlichkeit, welche für "ein Schritt vor – zwei Schritte zurück" gilt, ist aber nie kleiner als die entsprechende Wahrscheinlichkeit, welche wir für "ein Schritt vor – ein Schritt zurück" berechnet haben. Denn die Ungleichung

$$\frac{3 \cdot k + 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^k}{3 \cdot n + 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n} \geq \frac{k}{n}$$

ist für $0 < k < n$ zunächst äquivalent zu:

$$\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^k}{k} \geq \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n}$$

Wenn wir nun von der rechten Seite dieser Ungleichung zeigen können, dass es sich dabei um eine positive, nicht steigende Folge handelt, dann wäre obige Aussage bewiesen. Die Monotonie überprüfen wir folgendermaßen:

$$\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n} \geq \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1} \quad \Longleftrightarrow \quad (-1)^n \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot n + 1\right) \leq 2^n$$

Die letzte Ungleichung ist aber wegen

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 1 + n + \frac{n \cdot (n-1)}{2} + \cdots \quad \text{für} \quad n \geq 2$$

sicherlich richtig.

In der nachfolgenden Tabelle sind für $n = 10$ die Gewinnwahrscheinlichkeiten bei "ein Schritt vor – ein Schritt zurück" den Gewinnwahrscheinlichkeiten von "ein Schritt vor – zwei Schritte zurück" gegenübergestellt. Man erkennt, dass der Unterschied in den Wahrscheinlichkeiten mit der Nähe zur Gewinnposition abnimmt.

k	ein Schritt zurück	zwei Schritte zurück
1	0.1	0.145
2	0.2	0.218
3	0.3	0.327
4	0.4	0.417
5	0.5	0.517
6	0.6	0.612
7	0.7	0.710
8	0.8	0.806
9	0.9	0.903

Wir folgern aus unserer Analyse, dass ein Leben mit wenigen, aber heftigen Rückschlägen erfolgversprechender ist, als ein Leben mit vielen kleinen Rückschlägen. Allerdings, und das ist bemerkenswert, ist dieser Vorteil umso ausgeprägter, je weiter wir vom Ziel entfernt sind. Diese, schon sehr philosophischen Aussagen gelten aber nur unter der oben angeführten Prämisse der *absoluten Freiheit in der Entscheidung*.