Zum gravitativen Massendefekt einer homogenen Kugel

Johannes Barton, Wien 2017

Einleitung

Die Beschreibung des gravitativen Massendefekts im Rahmen der Newton'schen Gravitationstheorie ist ein ausgezeichnetes Beispiel dafür, wie hinderlich das abschnittsweise Abarbeiten von Lehrinhalten für ein tieferes Verständnis sein kann.
Zumeist wird nämlich der Begriff "gravitative Bindungsenergie" in der klassischen Mechanik völlig isoliert vom Begriff "Massendefekt" aus der speziellen Relativitätstheorie behandelt und erst in der Astrophysik bei der Entstehung von Sternen zu dem Begriff "gravitativer Massendefekt" vereint: *Wenn eine Gaswolke in sich zusammenstürzt und ein Stern entsteht, wird Energie frei, die Gravitations–Bindungsenergie. (...) der Stern hat folglich eine Masse, die geringer ist als die Masse des ursprünglich vorhandenen Gases.* [1]
In so manchem Lehrbuch, wie zum Beispiel im Berkeley Physik Kurs, wird die gravitative Bindungsenergie einer homogenen Kugel mit dem Radius R und der Masse M durch Integration zu

$$\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$

berechnet, wobei G die Gravitationskonstante bezeichnet [2]. Solch eine Berechnung ist zugleich eine beliebte Übungsaufgabe, mit der sich ein Physikstudent am Anfang seines Studiums konfrontiert sieht. Wendet sich, möglicherweise einige Semester später, der Physikstudent dem Massendefekt zu, dann ist nur mehr das Ergebnis erinnerlich, nicht jedoch sein Zustandekommen. So wird gemäß [3] auf einen relativen Massendefekt der Größe

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{3}{5} \cdot \frac{GM}{c^2 R} \tag{1}$$

geschlossen. Die Lichtgeschwindigkeit c stellt dabei die Äquivalenz von Masse m und Energie E über die bekannte Relation $E = mc^2$ sicher.
Bei genauer Betrachtung der Argumente, die zu Gleichung (1) führen, werden aber schon drei von einander abhängige Schwachstellen sichtbar:

- Bei der Berechnung der Bindungsenergie wird "freie Masse" aus dem Unendlichen kommend einer Kugel mit konstanter Dichte angelagert. Ob man dieser freien Masse überhaupt eine Dichte zuordnen kann, bleibt zumindest fragwürdig.
- Hält man sich an [1], dann müsste die Masse auf der rechten Seite von Gleichung (1) der freien Masse entsprechen. Diese kann aber im Gegensatz zur tatsächlichen Masse der Kugel experimentell nicht ermittelt werden. Bei dieser Interpretation des Massendefekts könnte im Rahmen der Newton'schen Gravitationstheorie die tatsächliche Masse der Kugel sogar negativ sein [3].
- Die Bindungsenergie, die ja erst den Massendefekt bewirkt, wird durch Integration berechnet, als ob es keinen Massendefekt geben würde.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es nun, den durch Beobachtungen belegten Massendefekt im Rahmen der Newton'schen Theorie neu zu deuten, indem drei weitere Möglichkeiten der Interpretation aufgezeigt werden.

Die erste Neuinterpretation

Nun soll zwischen "freier" Masse, die mit dem Index 0 versehen wird, und "gebundener" Masse (ohne Index) unterschieden werden. Die Energiebilanz beim Aufbau der Kugel aus infinitesimalen Massen könnte dann wie folgt formuliert werden: Wird einer homogenen Kugel mit Radius r und Masse m die infinitesimale Masse $\mathrm{d}m$ angelagert, dann kam sie als freie Masse aus dem Unendlichen, sodass ihr Beitrag zur Energiebilanz als $c^2\mathrm{d}m_0$ verbucht werden sollte. Damit ergibt sich der Zuwachs $c^2\mathrm{d}m$ der Gesamtenergie als Summe der Zuwächse vom Energieäquivalent der freien Masse und potenzieller Energie.

$$c^2 \cdot \mathrm{d}m = c^2 \cdot \mathrm{d}m_0 - \frac{Gm}{r} \cdot \mathrm{d}m \tag{2}$$

Unter Beachtung der konstanten Dichte ρ kann die Substitution

$$m = \frac{4\pi}{3}\rho r^3 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{d}m = 4\pi\rho r^2\mathrm{d}r$$

erfolgen und führt auf:

$$\int \mathrm{d}m_0 = \int \left(4\pi\rho \cdot r^2 + \frac{G(4\pi\rho)^2}{3c^2}r^4\right) \mathrm{d}r$$

Wird für eine Kugel mit Radius R eine freie Masse M_0 benötigt, dann liefert obige Gleichung mit der Rücksubstitution

$$M = \frac{4\pi\rho}{3}R^3$$

den Ausdruck:

$$\frac{M_0}{M} = 1 + \frac{3}{5}\frac{GM}{c^2R} \tag{3}$$

Auffallend an dieser Interpretation ist, dass die tatsächliche Masse M der Kugel schon vom Ansatz her stets positiv bleibt, damit ist eine der oben angeführten Schwachstellen beseitigt. Mit den Abkürzungen

$$x = \frac{c^2}{GM} \cdot R \quad \text{und} \quad y = \frac{M_0}{M}$$

lässt sich das Ergebnis dieser ersten Neuinterpretation als

$$y = 1 + \frac{3}{5x} \tag{4}$$

darstellen. Die dimensionslose Größe x ist ein Maß für den Radius bei gegebener Masse M der Kugel. Dagegen ist die dimensionslose Größe y als Verhältnis aus freier Masse zur gebundenen Masse eine leicht interpretierbare Maßzahl für den Massendefekt. Die Realisierung eines Massenpunktes der Masse M würde $x \to 0$ bedeuten und wegen $y \to \infty$ eine unendlich große Energie benötigen. Der zweite Grenzfall, nämlich $x \to \infty$ bedeutet eine unendlich große Kugel mit verschwindender Dichte und benötigt wegen $y \to 1$ neben der Ruheenergie Mc^2 keine weitere Energie.
Zu sagen bleibt, dass bei dieser Interpretation der Massendefekt nicht in der Berechnung der Bindungsenergie berücksichtigt wird.

Die zweite Neuinterpretation

Wird einer homogenen Kugel mit Radius r und Masse m die infinitesimale freie Masse $\mathrm{d}m_0$ angelagert, dann ergibt sich der Zuwachs $c^2\mathrm{d}m$ der Gesamtenergie als Summe der Zuwächse vom Energieäquivalent der freien Masse und potenzieller Energie zu:

$$c^2 \cdot \mathrm{d}m = c^2 \cdot \mathrm{d}m_0 - \frac{Gm}{r} \cdot \mathrm{d}m_0 \tag{5}$$

Da die infinitesimale freie Masse $\mathrm{d}m_0$ das Massenäquivalent der infinitesimalen Energie der Anlagerung an die gegebene Kugel ist, trägt diese Neuinterpretation der Auffassung Albert Einsteins Rechnung, dass jede Energie als Quelle der Gravitation herangezogen werden muss [4]. Jetzt wird der Massendefekt bei der Berechnung der Bindungsenergie berücksichtigt, weil im letzten Term der obigen Gleichung beide Arten von Masse auftreten. Trennung der Variablen und Substitution bei konstanter Dichte ρ liefert mit den Abkürzungen

$$a = \sqrt{\frac{4\pi G\rho}{3c^2}} \quad \text{und} \quad z = a \cdot r$$

die Integralgleichung

$$\frac{3c^2}{aG} \int \frac{z^2}{1-z^2}\mathrm{d}z = \int \mathrm{d}m_0$$

mit der Lösung:

$$\frac{3c^2}{2aG} \left(\ln \left| \frac{aR+1}{aR-1} \right| - 2aR \right) = M_0$$

Da allerdings auch

$$aR = \sqrt{\frac{GM}{c^2R}} = \sqrt{\frac{1}{x}}$$

gilt, kann das Verhältnis der freien zur gebundenen Masse als

$$y = \frac{M_0}{M} = \frac{3x}{2} \left(\sqrt{x} \ln \left| \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right| - 2 \right) \tag{6}$$

angeschrieben werden. Diese Funktion hat bei $x = 1$ eine Polstelle. Der Bereich $x > 1$ liefert für die traditionelle Physik durchaus sinnvolle Werte, wogegen der Bereich $0 < x < 1$ Lösungen zeigt, die vielleicht zu Spekulationen über Begriffe wie “dunkle Materie” oder “negative Energie” Anlass geben.

Die dritte Neuinterpretation

Der Vollständigkeit halber soll noch eine Variante angegeben werden: Wird einer homogenen Kugel mit Radius r und einem Massenäquivalent m_0 die infinitesimale Masse $\mathrm{d}m$ angelagert, dann ergibt sich der Zuwachs $c^2\mathrm{d}m$ der Gesamtenergie als Summe der Zuwächse vom Energieäquivalent der freien Masse und potenzieller Energie zu:

$$c^2 \cdot \mathrm{d}m = c^2 \cdot \mathrm{d}m_0 - \frac{Gm_0}{r} \cdot \mathrm{d}m \tag{7}$$

Auch bei dieser Interpretation ist jede Form von Energie als Quelle der Gravitation aufzufassen. Unter Berücksichtigung, dass nur der gebundenen Masse eine Dichte ρ zukommt, ergibt sich folgende Differentialgleichung:

$$4\pi\rho \left(c^2r^2 + Gm_0r \right) \cdot \mathrm{d}r = c^2 \cdot \mathrm{d}m_0$$

Ein integrierender Faktor ist schnell gefunden, sodass die so entstehende exakte Differentialgleichung durch

$$M_0 = \frac{\sqrt{2G\rho}\,c^3}{4G^2\rho} \cdot \exp\left(\frac{2\pi\rho G R^2}{c^2}\right) \cdot \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{2\pi\rho G R^2}{c^2}}\right) - \frac{c^2 R}{G}$$

gelöst wird. Rücksubstitution von der Dichte auf die gebundene Masse M der Kugel und die Verwendung der schon in den anderen Interpretationen benützten Abkürzungen x und y liefern:

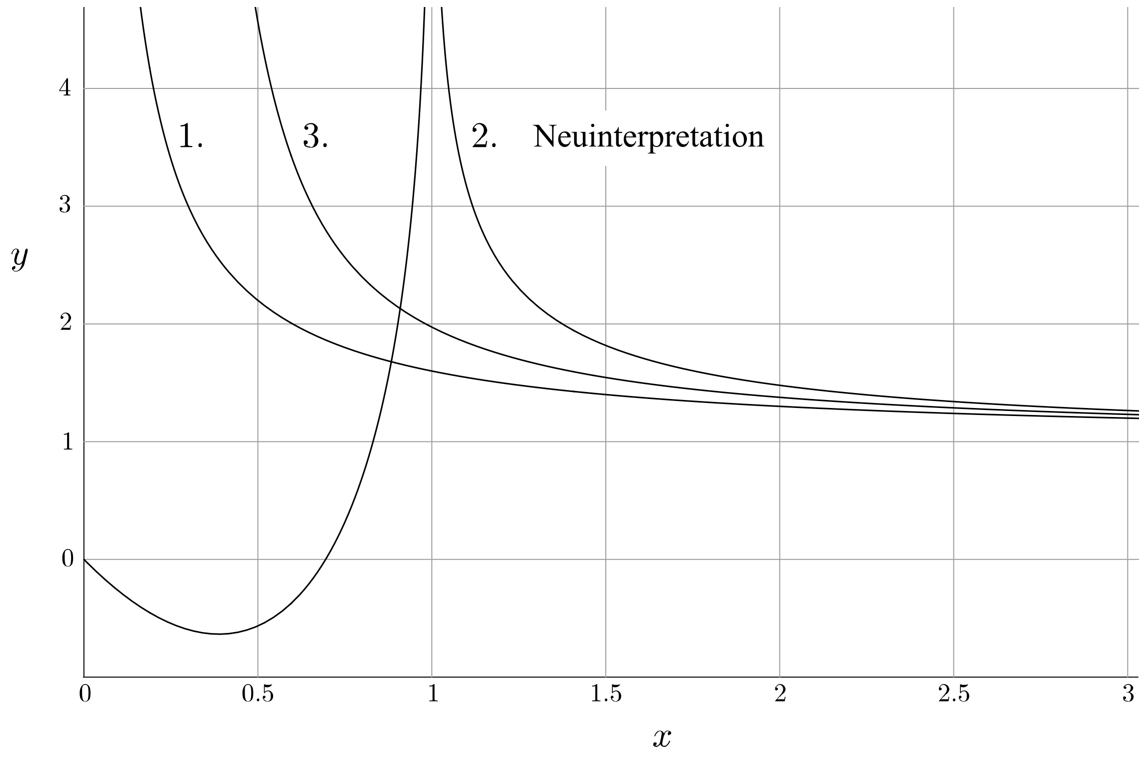
$$y = \sqrt{\frac{\pi}{6}} \cdot \exp\left(\frac{3}{2x}\right) \cdot \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{3}{2x}}\right) \cdot \sqrt{x^3} - x \tag{8}$$

Dabei ist die Errorfunction wie folgt definiert:

$$\operatorname{erf}(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^s \exp(-t^2) \cdot \mathrm{d}t$$

Diskussion

Entscheidend an den obigen Darlegungen ist, dass der Lernende sich folgender Aussage bewusst wird: "So wie der gravitative Massendefekt nicht ohne gravitative Bindungsenergie zu denken ist, kann die Bindungsenergie nicht ohne Massendefekt behandelt werden."
Allen drei Neuinterpretationen ist gemein, dass sie als Ausgangspunkt die real existierende Kugel mit Radius R und Masse M verwenden, sodass man sich mit den angegebenen Formeln die Energie in Form von freier Masse, die für den Aufbau der Kugel notwendig ist, berechnen kann. Dies ist auch der entscheidende Unterschied zwischen der ersten Neuinterpretation und der klassischen, die von der freien Masse ausgeht, obwohl auf den ersten Blick starke Ähnlichkeiten zwischen den Gleichungen (1) und (3) bestehen.



Es soll nicht unerwähnt bleiben, dass der wohl vernünftigste Ansatz in der zweiten Neuinterpretation steckt, da in Glg. (5) einer schon mit dem Massendefekt behafteten Kugel freie Masse angelagert wird. Allerdings sind die Lösungen im Bereich $0 < x < 1$ schwer deutbar. Etwas leichter fällt das Verständnis, wenn man bedenkt, dass die Lösungen im Rahmen der Newton'schen Gravitationstheorie gefunden wurden und die Existenz einer mathematischen Lösung noch keine physikalische Realität bedingt. In dieser Interpretation ist es also nicht statthaft zu behaupten, dass beispielsweise eine Kugel mit $x = 1/2$ durch negative freie Masse aufgebaut wurde. Vielmehr müsste die Formulierung lauten: "Falls eine Kugel mit $x = 1/2$ existiert, dann wäre für ihren Aufbau eine negative freie Masse notwendig gewesen."

Quellen

[1] Sexl, R., Sexl, H. (1977) Weiße Zwerge – schwarze Löcher.
Braunschweig, Vieweg: S. 42f.

[2] Kittel, Ch., Knight, W., Ruderman, M. (1986) Berkeley Physik Kurs Bd. 1 Mechanik.
Braunschweig, Vieweg: S. 169f.

[3] Sexl, R., Urbantke, H. (1982) Relativität, Gruppen, Teilchen.
2. Auflage, Wien, New York, Springer: S. 64

[4] Einstein, A. (1917) Über die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie.
21. Auflage, Braunschweig, Vieweg (1979): S. 81